1)a) Explique por qué si $P \in R^{nxn}$, $P^2=P$ y $P \neq 0$, existe una matriz $Q \in R^{nxk}$ de columnas ortonormales tal que $P= QQ^t$, siendo k= rango(P)

b) Para P= $\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ **Halle Q en la condiciones del punto a)**

Primeros vemos que Px es la proyección de x sobre el Col(P)

i) $Px \in Col(P)$

ii) $(x-Px,Px) = (x-Px)^t\, Px = (x^t - x^tP^t)\, Px = x^t\, Px - x^tP^tPx$

(Como $P^t=P$ y $P^2=P$) $=x^tPx - x^tPx = 0$

Ahora vemos que $Q.Q^t.x$, donde $Q \in R^{nxk}$ es la matriz cuyas columnas son una BON de Col(P), es la proyección de x sobre el Col(P)

BON de Col(P)=$\{v_1, v_2, \dots. v_k\}$

$$Q^t.x = \begin{pmatrix} v_1 \rightarrow \\ v_2 \rightarrow \\ \vdots \\ v_k \rightarrow \end{pmatrix} . x = \begin{pmatrix} \langle v_1, x\rangle \\ \langle v_2, x\rangle \\ \vdots \\ \langle v_k, x\rangle \end{pmatrix}$$

$$QQ^t \cdot x = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \cdots & v_k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \langle v_1, x\rangle \\ \langle v_2, x\rangle \\ \vdots \\ \langle v_k, x\rangle \end{pmatrix} = (v_1,x)\, v_1 + (v_2,x)\, v_2 + \dots + (v_k,x)\, v_k =$$

=Proyección de x sobre el Col(P)

b) Busacamos una BON de col(P)

Aplicamos Grahm Schmith

Llamando P= $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ y BON de Col(P) ={ u_1, u_2 }

$$v1 := \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$|v1| = 0.913$

$u1 := \frac{v1}{|v1|}$

$u1 = \begin{pmatrix} 0.913 \\ -0.183 \\ 0.365 \end{pmatrix}$

$v2 := \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$g2 := v2 - (v2 \cdot u1)u1$

$g2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

$u2 := \frac{g2}{|g2|}$

$u2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.894 \\ 0.447 \end{pmatrix}$

$v3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$g3 := v3 - (v3 \cdot u1) \cdot u1 - (v3 \cdot u2) \cdot u2$

$g3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q := \begin{pmatrix} 0.913 & 0 \\ -0.183 & 0.894 \\ 0.365 & 0.447 \end{pmatrix}$

Comprobamos:

$P := Q \cdot Q^T$

$P = \begin{pmatrix} 0.834 & -0.167 & 0.333 \\ -0.167 & 0.833 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$

Es la matriz P del enunciado!!

2)Considere en *C*([-1,1]) el producto interno (f,g)= $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

a)Encontrar α y β que minimicen el valor de $\int_{-1}^{1}\left[e^{2x}-(\alpha+\beta x)\right]^2 dx$

b)Hallar el elemento de $S^{\perp}$ que mejor aproxima a f(x)= $2e^{2x}$ +1, siendo S=gen{1,x}.

a) $\int_{-1}^{1}\left[e^{2x}-(\alpha+\beta x)\right]^2 dx = \left(e^{2x}-(\alpha+\beta x), e^{2x}-(\alpha+\beta x)\right) = \left\| e^{2x}-(\alpha+\beta x)\right\|^2$

Se trata de minimizar la distancia de e^{2x} a P_1.
Buscamos $proy_{P1}(e^{2x})$

{1,x} es BOG de P_1

$\| 1 \|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2$

$\| x \|^2 = 1\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$

$proy_{P1}(e^{2x}) = \frac{(1,e^{2x})}{\| 1 \|^2} 1 + \frac{(x,e^{2x})}{\| x \|^2} x$

$(1,e^{2x}) = \int_{-1}^{1} e^{2x} dx = ½ (e^2 - e^{-2})$

$(x,e^{2x}) = \int_{-1}^{1} x \cdot e^{2x} dx = ¼ e^2 + ¾ e^{-2}$

$proy_{P1}(e^{2x}) = ¼ (e^2 - e^{-2}) + (3/8\ e^2 + 9/8\ e^{-2})\ x$

Siendo $\| e^{2x} - proy_{P1}(e^{2x}) \|^2$ el valor mínimo:

α=1/4 (e^2-e^{-2}) y β= 3/8 e^2 + 9/8 e^{-2}) x

b) f(x) = 2 e^{2x} +1
S= gen{1,x}

$proy_{S^{\perp}}(f(x))$ = f(x) - $proy_S(f(x))$

$proy_S(2e^{2x} + 1) = 2\, proy_S(e^{2x}) + proy_S\, 1$

La $proy_S\, 1 = 1$ (Porque $1 \in S$) y usando $proy_{P1}(e^{2x})$ del item a)

$Proy_S(2e^{2x} + 1) = ½\,(e^2 - e^{-2}) + (3/4\, e^2 + 9/4\, e^{-2})\, x + 1$

$proy_{S^\perp}(f(x))$ **= 2 e^{2x} – ½ (e^2 –e^{-2}) – (3/4 e^2 + 9/4 e^{-2}) x**

3) Sea T : $P_2 \rightarrow R^3$ definida como $T(p)=[p(-1)\ p(r)\ p(1)]^t$ con $r \in R$

a) Determinar todos los valores de r para que T no sea biyectiva. Para uno de los valores de r hallados encontrar bases de Nu(T) y de Im(T).

b) Para r=0 hallar T^{-1} y calcular T^{-1} ($[1\ 0\ 0]^T$).

Siendo E ={1,t,t^2} base de P_2

E'= base canónica de R^3

$[T]_{EE'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Para que no sea biyectiva, la dimensión de la imagen debe ser menor a tres, como la dimensión de la imagen coincide con el rango de la matriz. Para que la matriz tenga rango menor que tres el determinante debe ser igual a cero.

Det([T]) = $2 - 2r^2 = 0 \Rightarrow$ **r=1** $\vee$ **r=-1**

Para r=1 .

Hallamos el núcleo : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Siendo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x \end{pmatrix}$ vector coordenado en base E de los vectores del núcleo.

Resolviendo, los vectores coordenados tienen la forma : $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

Nu(T)=gen{1-t^2}

La imagen: $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

b)Para r=0 (La transformación es biyectiva)

$$[T^{-1}]_{E'E} = [T_{EE'}]^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & -1 & 1/2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto: $T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\ \tfrac{1}{2}\ t + \tfrac{1}{2}\ t^2$

$$\mathbf{T^{-1}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{1 - t^2}$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\ t + \tfrac{1}{2}\ t^2$$

Con lo que $\mathbf{T^{-1}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \mathbf{x_2 + \left(-1/2\ x_1 + \tfrac{1}{2}\ x_3\right) t + \left(\tfrac{1}{2}\ x_1 - x_2 + \tfrac{1}{2}\ x_3\right) t^2}$

4) Sea $T \in L(R^2, R^4)$ definida por $T([0{,}5\ 0{,}5\ ]^t) = [1\ 1\ 0\ 1\ ]^t$ y $T([0{,}5\ -0{,}5]^t) = [1\ 0\ 1\ 1]^t$

a) Explicar por qué T está bien definida y hallar la representación matricial en las bases canónicas de R^2 y R^4.

b) Dado $u = [1\ 1\ 1\ 1]^t$, encontrar $x' \in R^2$ tal que $\|T(x') - u\| \le \|T(x) - u\|$ para todo $x \in R^2$

a) Siendo $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}$ Sumando los vectores del enunciado

$$T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$ Restando los vectores del enunciado

Queda claro que la transformación está definida sobre una base de R^2

T(x) = A x **Siendo** $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\1&-1\\2&0\end{pmatrix}$ $=[\mathbf{T}]_{\mathbf{EE'}}$

b) $\|T(x')-u\|\leq\|T(x)-u\|$ para todo x $\in R^2$
$\|A\,x'-u\|\leq\|A\,x-u\|$ para todo x $\in R^2$

Con lo que vemos que x' es la solución de *A x =u* por cuadrados mínimos

A^t A x' = A^t u Dando **x'=** $\begin{pmatrix}3/5\\0\end{pmatrix}$ **(Cómo el rango de A es máximo encontramos una solución única)**

5)a) Dada A= $-\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ **i) Decidir si se puede encontrar una base de R^3 formada por autovectores de A. ii) Encontrar los autovalores de A^{-1}-2 I. b) dada A=** $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\0&A_3\end{pmatrix}$ **, con A_1 y A_3 cuadradas, si A_1 tiene un autovalor nulo, ¿es A inversible?**

a) i) det (A-λI)= $\begin{vmatrix}2-\lambda&1&-1\\0&1-\lambda&0\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$ $=(2-\lambda)^2(1-\lambda)-(1-\lambda)=(1-\lambda)[(2-\lambda)^2-1]=0$

λ=1 raíz doble
λ=3 raíz simple

Para decidir si existe base de autovectores, sólo hay que ver la dimensión del autoespacio asociado al autovalor doble ($S_{\lambda=1}$) si es dos, existe base de autovectores, si la dimensión fuera 1, no existe.

$S_{\lambda=1}$: (A-I)v =0 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Como el rango de la matriz A-I es 1, la nulidad tiene dimensión 2 ⇒ dim ($S_{\lambda=1}$) =2 ⇒ **existe base de autovectores**

ii)Teniendo en cuenta que: a) $\lambda + r$ es autovalor de A +rI (siendo λ autovalor de A)
b) $1/\lambda$ autovalor de A^{-1}

Autovalores de A^{-1} : 1 y 1/3

Autovalores de A^{-1} - 2I: 1-2=**-1** y 1/3 –2**=-5/3**

b) Si A_1 tiene autovalor nulo ⇒ det(A_1)=0

det$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ =det(A_1) det(A_3) =0 ⇒ **A=** $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ **no es inversible**